Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade de Ribeirão Preto

Economia Monetária – Curso de Economia / 2º. Semestre de 2014
Profa. Dra. Roseli da Silva

Nota de aula – CAPM

Introdução

Há dois modelos bastante utilizados para precificação de ativos de capital na literatura empírica de mercados financeiros, quais sejam: ***Capital Asset Pricing Model*** (CAPM) e o ***Arbitrage Pricing Theory*** (APT), principalmente porque são facilmente testados empiricamente. Os preços e os retornos dos ativos são inversamente relacionados, ou seja: quanto maior o preço de um título menor a sua taxa de retorno. Portanto, podemos estudar a precificação dos ativos analisando seus retornos ao invés de seus preços. Além disso, as características estatísticas dos retornos são de tratamento estatístico mais simples que as dos preços (em geral são passeios aleatórios, que corresponde à hipótese fraca de mercados eficientes). Por estes motivos, estes modelos de precificação são formalizados em termos dos retornos e não dos preços dos ativos. Os ativos cujos retornos não são garantidos (certos) são denominados ativos de risco. Tanto o retorno quanto o risco variam de ativo para ativo.

CAPM

Desenvolvimento: Markowitz (1959) desenvolveu a teoria de seleção de portfólio em termos de retorno esperado e variância do retorno, estabelecendo as bases para o CAPM. A partir daí, Sharpe (1964) e Lintner (1965b) desenvolveram um modelo de implicações econômicas mais amplas, o CAPM, que passamos a apresentar sucintamente.

Objetivo: quantificar o *tradeoff* entre risco e retorno esperado de um investimento de risco. Como implicação, este modelo apresenta uma relação linear entre o retorno de um ativo e sua covariância com o retorno do portfólio de mercado. Quantificado o risco do ativo, podemos obter uma estimativa do preço "justo" deste ativo.

As hipóteses básicas deste modelo são:

- os investidores têm expectativas homogêneas (iguais);
- os investidores mantêm portfólios que são média-variância eficientes;
- não há imperfeições no mercado de ativos;
- e todos os agentes contam com a possibilidade de emprestar ou tomar emprestado ativos sem risco às mesmas taxas de juros.

Portfólios média-variância eficientes:

Forma-se um portfólio (carteira) distribuindo-se uma dada riqueza entre os diversos ativos financeiros disponíveis. Denominando um ativo de risco de x_i, com n ativos de risco na economia (i = 1, 2, 3,...,n), um portfólio, p, é determinado pela alocação percentual (w_i) da riqueza em cada ativo x_i :

$$p = w_1 x_1 + w_2 x_2 + w_3 x_3 + \ldots + w_n x_n$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$$

O retorno (r_i) de cada ativo x_i é uma variável aleatória, com distribuição, por hipótese, $N\left(\bar{r}_i, \sigma_i^2\right)$.

A variância do retorno do ativo (ou o seu desvio-padrão) é a medida do risco associado a ele: quanto maior a variância (ou o desvio-padrão) mais dispersos em torno do retorno médio estarão os valores possíveis do retorno do ativo x_i, e portanto maior a "incerteza" quanto a obter o retorno esperado (médio).

O retorno do portfólio, r_p, é uma média ponderada por w_i dos retornos dos ativos:

$$r_p = w_1 r_1 + w_2 r_2 + w_3 r_3 + \ldots + w_n r_n$$

O retorno esperado do portfólio, $E\left[r_p\right] = \bar{r}_p$, é dado por:

$$\bar{r}_p = w_1 \bar{r}_1 + w_2 \bar{r}_2 + w_3 \bar{r}_3 + \ldots + w_n \bar{r}_n$$

Simplificando, podemos considerar todos os n ativos com mesma participação na composição do portfólio, w_i=1/n, e o retorno esperado do portfólio torna-se:

$$\bar{r}_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i}{n}$$

Apenas para ilustrar o raciocínio, suponha que os retornos dos ativos sejam independentes (o que implica correlação nula) e de mesma variância. A variância do retorno do portfólio, nessas condições, é dada por:

$$\mathrm{var}(r_p) = \frac{o^2}{n} \qquad \text{(mesma demonstração da variância da média amostral)}$$

Ou, mais genericamente:

$$\mathrm{var}(r_p) = w_1^2\,\mathrm{var}(r_1) + w_2^2\,\mathrm{var}(r_2) + \ldots + w_n^2\,\mathrm{var}(r_n) + 2w_1 w_2\,\mathrm{cov}(r_1, r_2) + \ldots + 2w_i w_j\,\mathrm{cov}(r_i, r_j)$$

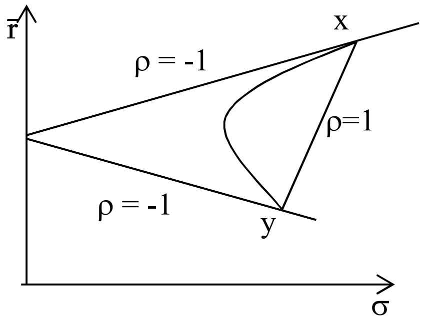
Assim, se quisermos diminuir o risco (variância) do retorno do portfólio, podemos aumentar o número de ativos (n), ou seja, a **diversificação**, em geral, diminui o risco do portfólio. Porém, também ocorre uma diminuição do retorno do portfólio quando diversificamos. Muitas pessoas não estão dispostas a perder muito retorno para diminuir um pouco o risco, ainda que consideradas como investidores avessos ao risco, então é necessário entender os efeitos da diversificação sobre a média e a variância do portfólio: esta é a motivação do *approach* média-variância.

Suponha que tenhamos dois ativos de risco, x e y, estes ativos podem ser combinados, com certos pesos (α e $(1-\alpha)$), formando um portfólio.

$$p = \alpha x + (1-\alpha)y$$

$$0 < \alpha < 1$$

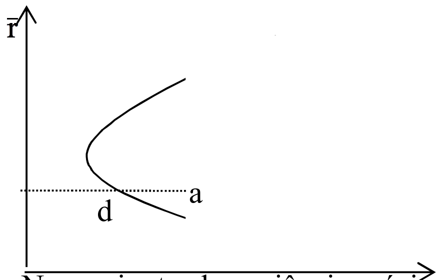
A média ($\bar{r}_p$) e a variância (σ_p^2) do retorno do portfólio podem ser calculadas a partir das médias, variâncias e covariância dos retornos dos ativos originais x e y. Conforme os pesos (α) variem, $\bar{r}_p$ e σ_p^2 dependem da correlação entre os ativos originais. É possível mostrar que esta combinação, para cada correlação (ρ), será delimitada pela área do triângulo abaixo (no plano retorno médio contra desvio-padrão), conforme a correlação passe de perfeita positiva a perfeita negativa:



Para n ativos de risco, podemos plotar no diagrama média - desvio-padrão todos os portfólios possíveis para todos os esquemas de ponderação possíveis, para dada correlação entre os ativos, este conjunto de pontos é chamado de **conjunto ou região factível** e compreende toda a área do triângulo axy. É possível mostrar que este conjunto tem a aparência do gráfico abaixo.

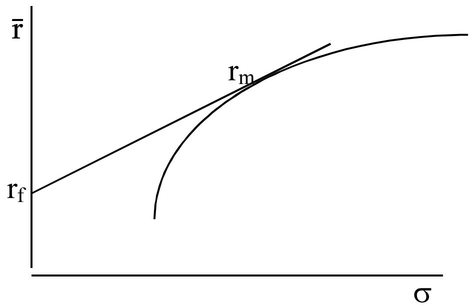
Pensemos num portfólio como o apontado por a no gráfico abaixo. Embora seja um portfólio possível, o agente que deseja obter o retorno associado ao portfólio a, pode obtê-lo combinando os ativos de outra forma de modo a incorrer em menor risco (desvio padrão menor), escolhendo o portfólio do ponto d.

Seguindo este raciocínio, apenas os portfólios da fronteira da região factível serão, de fato, escolhidos, chamados de **conjunto de variância mínima** (fronteira).



No conjunto de variância mínima há um portfólio que oferece a menor variância possível, dado pelo vértice da parábola invertida. Se o agente está disposto a correr um risco maior que o mínimo, ele escolherá maximizar o retorno, escolhendo um portfólio no conjunto de variância mínima (fronteira) que esteja acima do retorno do portfólio de variância mínima, e não abaixo. O conjunto desses portfólios acima do portfólio de variância mínima é chamado de **fronteira eficiente.**

Se considerarmos a existência de um ativo livre de risco, com retorno r_f, também podemos mostrar que todos os agentes - por hipótese, avessos ao risco - dessa economia formarão portfólios em que seja possível obter o retorno certo (r_f) e uma combinação dos demais ativos de risco da economia, que permite o alcance de um retorno maior. Escolherão, portanto, portfólios de equilíbrio que são combinações lineares deste ativo sem risco e do portfólio **tangente** à fronteira eficiente, este chamado de **portfólio de mercado**, com retorno r_m:



Baseado neste arcabouço teórico, uma das versões do modelo CAPM afirma que o retorno de qualquer ativo da economia, que pertencerá a um portfólio sobre a reta do gráfico acima, pode ser expresso como uma função linear do excesso de retorno do portfólio de mercado.

$$r_i = \alpha + \beta(r_m - r_f)$$

Neste caso, o parâmetro estimado α é uma medida do retorno do ativo livre de risco.

Numa outra versão, mais popular, o modelo CAPM é formulado em termos do excesso de retorno, ou seja, da diferença entre o retorno do ativo ou do portfólio e o retorno do ativo livre de risco (r_f):

$$z_i = r_i - r_f$$
$$z_m = r_m - r_f$$

Assim, o excesso de retorno sobre o ativo sem risco de um ativo de risco qualquer (z_i) pode ser expresso como uma função linear do excesso de retorno do portfólio de mercado também em relação ao ativo sem risco (z_m).

$$z_i = \alpha + \beta z_m$$

Neste caso, esperamos que o coeficiente linear, tratando tal modelo como um modelo regressão linear simples, dessa equação seja estatisticamente nulo.

Ao aplicarmos um método estatístico para estimar os parâmetros desta regressão linear simples, os testes sobre estas estimativas estarão testando, de fato, a hipótese de equilíbrio da economia, de distribuição de probabilidade normal dos retornos (devido à utilização da matriz teórica de média-variância), de adequação da *proxy* para o portfólio de mercado e dos métodos econométricos utilizados.

Na prática, qualquer que seja a carteira individual do investidor, o CAPM correlaciona as expectativas de retorno destes ativos com um índice mais abrangente que pode ser denominado *portfolio* de mercado.

Na realidade, a idéia centrada na existência de um *portfolio* de mercado reside no fato de que haja apenas um indicador que possa oferecer a todos os investidores o mesmo nível de informação em que se baseiam todas as tomadas de decisão. A constituição da carteira individual do investidor dependerá da alocação de cada ativo, porém conterá certamente ativos negociados no mercado. O *portfolio* de mercado será portanto uma carteira que contém todos os ativos negociados no mercado. De certa forma, este será o *portfolio* mais diversificado, pois conterá uma pequena parcela de cada um dos ativos negociados no mercado.

Como exemplo de precificação, suponha que um ativo seja comprado a um preço P (conhecido) e mais tarde vendido a um preço Q (aleatório):

$$\frac{\overline{Q} - P}{P} = r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)$$

Resolvendo para P, obtemos:

$$P = \frac{\overline{Q}}{1 + r_f + \beta(\bar{r}_M - r_f)}$$

Interpretando o CAPM

O CAPM utiliza os conceitos de risco diversificável e risco não-diversificável para concluir que o fator de risco relevante de um ativo individual é sua contribuição para o risco de um portfolio bem diversificado. Na verdade o CAPM parte da premissa de que existe um limitado relacionamento entre os retornos dos ativos e os retornos do mercado. Esse retorno, seja para uma carteira ou para o mercado, consiste em ganhos de capital mais receita de dividendos.

A volatilidade do mercado pode ser tomada como um parâmetro para a avaliação dos graus de risco dos ativos e títulos individuais. De fato, o grau de risco é determinado pela medida da sensibilidade dos retornos de uma carteira em relação aos retornos de mercado. Assim, o CAPM estabelece que a sensibilidade das ações individuais pode ser medida se comparadas a um índice comum, neste caso, o mercado.

A tendência que um ativo possui de subir ou cair com o mercado se reflete em seu Coeficiente Beta (β) que representa uma medida de variação dos retornos de um dado ativo em relação a um índice de mercado definido.

O Coeficiente Beta (β) constitui um elemento fundamental do CAPM que significa a medida relativa do risco não-diversificável associado aos retornos de um *portfolio* com relação ao retorno do índice do mercado. De fato, o mercado é um padrão para a obtenção do que é conhecido como risco não-diversificável.

O modelo parte da taxa livre de risco e, então, adiciona o prêmio pelo risco, que consiste no retorno médio do mercado menos a taxa livre de risco e multiplicado pelo índice do risco não-diversificável do título, ou seja, o beta.

A composição do *portfolio* individual de um sujeito dependerá da estratégia de mercado que for adotada. Na realidade, a tomada de decisão quanto ao investimento está vinculada ao nível de risco que se está disposto a suportar. De fato, o nível aceitável de risco é o que separa o poupador do investidor. Assim, da escolha individual da taxa de risco admissível dependerá a parcela do capital que será investido em cada um dos mercados encontrando assim o ponto ótimo sobre a fronteira eficiente em que residirá o *portfolio.* É relevante ressaltar que o nível da taxa de juros afeta todos investimentos e conseqüentemente a decisão do investidor.

Referências

CAMPBELL, J.; LO, A.; MACKINLAY, A. **The Econometrics of Financial Markets**, Princeton University Press, 1997.

LUENBERGER, **Investment Science**

ROSS, S., *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, Journal of Economic Theory, vol. 13, 1976.